УДК 519.6 : 004.8

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОГО І ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Р.О. РУДЕНКО[1*], Н.А. МАРЧЕНКО[2]

[1] *магістрант кафедри «Системний аналіз та інформаційно-аналітичні технології», НТУ «ХПІ», Харків, УКРАЇНА*
[2] *доцент кафедри «Системний аналіз та інформаційно-аналітичні технології», канд. техн. наук, НТУ «ХПІ», Харків, УКРАЇНА*
[*]*email: roman.rudenko.a@gmail.com*

Диференціальні рівняння, в тому числі звичайні диференціальні рівняння (ЗДР) і диференціальні рівняння в частинних похідних (ДРЧП), є ключовими математичними моделями для різних фізичних, технічних і економічних додатків. У більшості ситуацій непрактично знаходити аналітичні розв’язки, і чисельні розв’язки стають все більш актуальними для цих задач. При розв'язанні таких задач шукається функція, яка задовольнить як диференціальним рівнянням в області, так і початковим або граничним умовам. Поширеними чисельними методами для розв'язання ЗДР / ДРЧП є методи Рунге-Кутта, лінійні багатокрокові методи і методи предиктор-коректор. Для чисельного розв'язання ДРЧП найбільш поширеними варіантами є метод скінченних різниць, метод скінченних об'ємів, метод скінченних елементів, спектральний метод і метод Гальоркіна [1]. У даній роботі для розв'язання ЗДР / ДРЧП пропонується використовувати нейронні мережі. Головною перевагою такого методу є те, що, на відміну від класичних методів, розв'язок представляється в аналітичній формі, від якої можна багаторазово брати похідні. Метод може бути застосований як для розв'язання ЗДР, так і для розв'язання систем ЗДР і ДРЧП [2].

Розглянемо задачу розв'язання диференціальних рівнянь у вигляді

$$G(x, F(x), F'(x), F''(x)...)=0, \tag{1}$$

з початковими умовами $F(x_0)=A_0$, $F'(x_1)=A_1$, $F''(x_2)=A_2$, де x – вектор змінних значень, $F(x)$ – шукана функція, x_0, x_1, x_2 – координати початкових умов, A_0, A_1, A_2 — відповідні значення .

Розв'язок представляється у вигляді:

$$F^*(x)=N(x, p), \tag{2}$$

де N – функція нейронної мережі з параметрами p і вхідними значеннями x, або у вигляді:

$$F^*(x)=A(x) + Q(x)\cdot N(x, p), \tag{3}$$

де $A(x)$ – функція заздалегідь задовольняє початковим умовам, а $Q(x)$ – функція побудована таким чином, щоб приймати значення, що дорівнюють нулю, в точках, відповідних координатам початкових умов.

Наближений розв'язок F^* для випадку (2) можна отримати в результаті мінімізації виразу:

$$(G(x, F^*(x), F^{*\prime}(x), F^{*\prime\prime}(x)...))^2+(F^*(x_0) - A_0)^2+(F^{*\prime}(x_1) - A_1)^2+(F^{*\prime\prime}(x_2) — A_2)^2.$$

Для випадку (3) вираз для мінімізації спрощується до вигляду:

$$(G(x, F^*(x), F^{*\prime}(x), F^{*\prime\prime}(x)...))^2,$$

однак, як випливає з експериментів, така форма має як переваги, так і недоліки.

Розглянемо задачу розв'язку ДР:

$$y'=cos(x), y(0)=0.$$

Аналітичний розв'язок має вигляд:

$$y=sin(x).$$

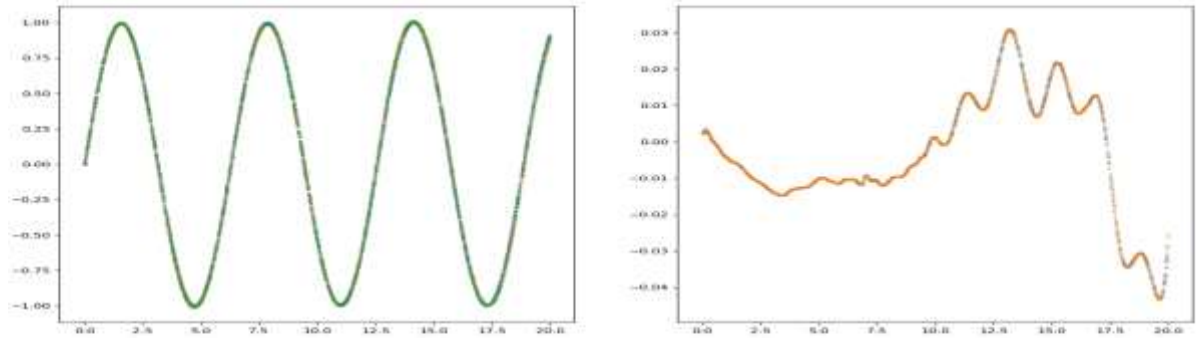

Рис. 1 – Розв'язок ДР у вигляді (2) (ліворуч), помилка розв'язку(справа)

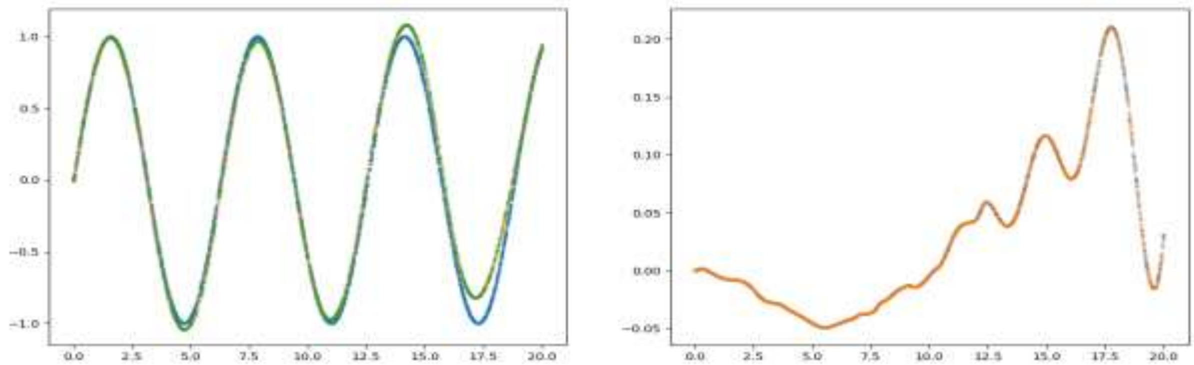

Рис. 2 – Розв'язок ДР у вигляді (3) (ліворуч), помилка розв'язку (справа)

На рис. 1 і 2 зображено розв'язки ДР в формах (2) і (3) відповідно. Можна помітити, що розв'язок в формі (2) не повністю задовольняє початковій умові, проте розв'язок в формі (3), незважаючи на задовільнення початкової умови, має значно більшу помилку на відстані від точки, яка задає початкову умову. Результати наведені для невеликої кількості ітерацій (k=80), кількість точок, на яких проводилася оптимізація становить 4000. Для оптимізації використаний метод стохастичного градієнтного спуску з моментом Adam, параметр швидкості навчання LR=0.001, розмір мінівиборки становить 100 прикладів.

Програмне забезпечення створено на мові програмування Python з використанням бібліотеки машинного навчання tensorflow.

Список літератури:

1. *Хайрер Э.,* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / *Хайрер Э., Ваннер Г.* // М.: Мир, 1999. 685 с.

2. *Lagaris I. E..* Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations / *Isaac Elias Lagaris, Aristidis Likas, Member, IEEE, and Dimitrios I. Fotiadis* // IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS, VOL. 9, NO. 5, SEPTEMBER 1998.